2 Topologische Räume

10. *Beispiele topologischer Räume (vgl. Vo. Bsp. 2.4).*
Zeige, dass die Topologien aus Vo. Bsp. 2.4 (iv) und (v) tatsächlich die Axiome (O1)–(O3) erfüllen (und daher zu Recht Topologien genannt werden). Genauer zeige, dass
    (i) auf $\mathbb{R}$ das System $\mathcal{O}_<$ bestehen aus allen Intervallen der Form $(-\infty, a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig zusammen mit $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ und
    (ii) das System $\mathcal{O}_{\mathrm{co}} := \{A \subseteq X |\ X \setminus A \text{ endlich}\} \cup \emptyset$ auf einer beliebigen Menge X

    tatsächlich Topologien sind.

11. *Topologien auf endlichen Mengen.*
Wieviele Toplogien gibt es auf einer Menge X, die
    (i) kein Element (also $X = \emptyset$)
    (ii) ein Element
    (iii) zwei Elemente

    hat und wie sehen diese aus?

12. *Vergleich von Topologien 1 (vgl. Vo. Bem. 2.6).*
Zeige, dass die in Vo. Bem. 2.6 definierte Relation $\leq$ auf der Menge aller Topologien auf einer fixen Menge X
$$\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2 \ :\Longleftrightarrow \mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$$
eine Ordnung aber keine Totalordnung definiert.

    Tipp: Für ein Beispiel nicht vergleichbarer Topologien empfiehlt es sich Aufgabe 11(iii) genauer anzusehen.

13. *Vergleich von Topologien 2.*
Zeige, dass auf $\mathbb{R}$
    (i) $\mathcal{O}_{\mathrm{Kl}} \leq \mathcal{O}_{\mathrm{co}} \leq \mathcal{O}_{\mathrm{n}} \leq \mathcal{O}_{\mathrm{dis}}$,
    (ii) $\mathcal{O}_{\mathrm{Kl}} \leq \mathcal{O}_< \leq \mathcal{O}_{\mathrm{n}} \leq \mathcal{O}_{\mathrm{dis}}$ und
    (iii) $\mathcal{O}_<$ ist mit $\mathcal{O}_{\mathrm{co}}$ unvergleichbar

    gilt. Dabei sind (vgl. Vo. Bsp. 2.4, 2.5) $\mathcal{O}_{\mathrm{kl}}$, $\mathcal{O}_{\mathrm{co}}$, $\mathcal{O}_{\mathrm{n}}$ und $\mathcal{O}_{\mathrm{dis}}$ die Klumpen-, die kofinite, die natürliche respektive die diskrete Topologie und die Topologie $\mathcal{O}_<$ in Aufgabe 10 (i) definiert.

14. *Topologie via abgeschlossene Mengen.*
In Vo. Def. 2.3 haben wir Toplogien durch die Vorgabe des Systems der offenen Mengen definiert. Alternativ dazu kann eine Topologie auch durch Vorgabe des Systems der *abgeschlossenen* Mengen definiert werden. Zeige dazu den folgenden Satz.

    Sei X eine Menge und $\mathcal{A}$ ein Teilsystem von 2^X mit den Eigenschaften

    (A1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{A}$
    (A2) Beliebige Durchschnitte von Mengen in $\mathcal{A}$ liegen wieder in $\mathcal{A}$.
    (A3) Endliche Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{A}$ liegen wieder in $\mathcal{A}$.

    Dann ist
$$\mathcal{O} := \{X \setminus A |\ A \in \mathcal{A}\}$$
eine Topologie auf X. $\mathcal{A}$ ist genau die Familie der abgeschlossenen Mengen in $(X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{O}$ ist die einzige Topologie mit diesen Eigenschaften.

15. *Basen in metrischen Räumen (vgl. Vo. Bsp. 2.10).*
Sei (X, d) ein metrischen Raum. Wir betrachten die Topologie $\mathcal{O} := \{O \subset X | \ \forall x \in O \ \exists B_\varepsilon(x) \subseteq O\}$ (vgl. Vo. Bsp. 2.4). Zeige

 (i) Die offenen ε-Kugeln $B_\varepsilon(x)$ $(x \in X, \ \varepsilon > 0)$ bilden eine Basis der Topologie.
 (ii) Die offenen $1/k$-Kugeln $B_{1/k}(x)$ $(x \in X, \ k \in \mathbb{N})$ bilden eine Basis der Topologie.

16. *Abzählbare Basis für den $\mathbb{R}^n$. (vgl. Vo. Bsp. 2.10)*
Wir betrachten $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_n)$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass es eine abzählbare Basis für diese Topologie gibt. Unter Verwendung von Aufgabe 15 (ii) zeige, dass die offenen $1/k$-Kugeln $B_{1/k}(x)$ mit rationalen Mittelpunktskoordinaten (d.h. $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \in \mathbb{Q} \ \forall 1 \leq i \leq n$) eine Basis bilden. Jede dieser $B_{1/k}(x)$ ist also durch $n + 1$ rationale Zahlen bestimmt und daher ist $\{B_{1/k}(x) | \ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}^n, \ k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis für $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_n)$.

17. *Subbasis für $\mathbb{R}$.*
Zeige, dass die Intervalle
$$\mathcal{S}_\mathbb{R} := \{(-\infty, a), (a, \infty) | \ a \in \mathbb{Q}\}$$
eine Subasis für die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$ bilden.

18. *Boxtopologie (vgl. Vo. Bsp. 2.15(ii)).*
Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$ $(i \in I, \ I$ beliebig) topologische Räume. Das (in Vo. Bsp. 2.15(ii)) angegebene System
$$\mathcal{B}_{\text{Box}} := \{\Pi_{i \in I} Y_i | \ Y_i \in \mathcal{O}_i \text{ beliebig } \}$$
erfüllt die Eigenschaften (B1) und (B3) aus Vo. Satz 2.11 und ist daher Basis einer Topologie auf $\Pi_{i \in I} X_i$.

19. *Grundeigenschaften von Umgebungsbasen.*
Beweise den Satz 2.24 aus der Vo., d.h. beweise, dass in jedem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ für ein System von Umgebungsbasen $\mathcal{W}_x$ $(x \in X)$ die drei Eigenschaften

(UB1) $\forall W \in \mathcal{W}_x : \ x \in W$
(UB2) $\forall W_1, W_2 \in \mathcal{W}_x \ \exists W_3 \in \mathcal{W}_x : \ W_3 \subseteq W_1 \cap W_2$
(UB4) $\forall W \in \mathcal{W}_x \ \exists V \in \mathcal{W}_x : \ V \subseteq W$ und $\forall y \in V \ \exists W_y \in \mathcal{W}_y : \ W_y \subseteq W.$

gelten.

20. *Umgebungsbasen für metrische Räume (vgl. Vo. Bsp. 2.26(i)).*
Zeige, dass in einem metrischen Raum die ε-Kugeln um x eine Umgebungsbasis bei x für die (von der Metrik induzierte—vgl. Vo. 2.4(i)) Topologie sind.

21. *Niemytzki-Raum (vgl. Vo. Bsp. 2.26(ii)).*
Zeige, dass die im Bsp. 2.26(ii) in der Vorlesung angegebenen Umgebungsbasen $\mathcal{W}_p$ für die Niemytzki-Topologie auf der oberen Halbebene tasächlich die einschlägigen Eigenschaften (UB1)—(UB3) erfüllen (und somit auch in diesm Fall zu Recht von einer Topologie gesprochen werden kann).

22. *Abschluss (vgl. Vo. Beob. 2.36).*
Zeige, dass für eine Teilmenge A eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ gilt.
 (i) $\bar{A} = A \cup \partial A$
 (ii) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$

23. *Charaktersisierung des Abschlusses (vgl. Vo. Prop. 2.39).*
Beweise Proposition 2.39 aus der Vorlesung also, dass der Abschluss $\bar{A}$ einer beliebigen Teilmenge A des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A enthält.

24. *Eigenschaften des Abschlusses (vgl. Vo. 2.40).*
Beweise Proposition 2.40 aus der Vorlesung, also folgende Eigenschaften des Abschlusses einer beliebigen Teilmenge A des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$.
    - $\bar{\emptyset} = \emptyset$ $\bar{X} = X$
    - $A \subset B \;\Rightarrow\; \bar{A} \subset \bar{B}$
    - $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
    - A ist abgeschlossen genau dann, wenn $\bar{A} = A$.
    - $\overline{\bar{A}} = A$

25. *Kugeln und Sphären in metrischen Räumen.*
Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Die Sphären $S_\varepsilon(x)$ und die abgeschlossenen Kugeln $K_\varepsilon(x)$ sind definiert als
$$S_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\} \quad \text{und} \quad K_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \le \varepsilon\}.$$
Zeige, dass alle $S_\varepsilon(x)$ und auch alle $K_\varepsilon(x)$ abgeschlossen sind.
Hinweis: Zeige zunächst, dass das Äußere der offenen ε-Kugel offen ist.

26. *Rand und Abschluss der ε-Kugeln im diskreten metrischen Raum.*
Sei X eine mindestens zweipunktige Menge und d die diskrete Metrik auf X.
    (i) Bestimme für $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ die Mengen $B_\varepsilon(x)$ sowie $S_\varepsilon(x)$ und $K_\varepsilon(x)$ (siehe Definitionen in Aufgabe 25.)
    (ii) Zeige, dass die von d auf X (gemäß Vo. Bsp. 2.4(i)) induzierte Topologie die diskrete Topologie ist.
    (iii) Vergleiche $S_1(x)$ mit $\partial B_1(x)$ und $K_1(x)$ mit $\overline{B_1(x)}$. Inwiefern unterscheidet sich die Situation hier von der (vertrauten und anschaulichen) Situation in $(\mathbb{R}^n, d_2)$?

27. *Vereinigung und Inneres; Duchschnitt und Abschluss.*
Seien A und B Teilmengen des Topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$. Finde Formeln (analog zu Vo. Prop. 2.34(iv) bzw. 2.40(iv)) für
    (i) $(A \cup B)^\circ$ und
    (ii) $\overline{A \cap B}$.

    Kläre die jeweilige Situation vollständig inklusive allfälliger Beweise und Gegenbeispiele— und zwar möglichst radikaler (das geht schon in $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$!).

28. *Niemytzki-Raum, Teil 2.*
Erstelle eine ausführliche Fassung des Beweises (vgl. Vo. Beweis von Thm. 2.54, Kor. 2.55), dass der Niemytzki-Raum separabel ist, aber nicht AA2 und daher auch nicht metrisierbar (dh. seine Topologie nicht von einer Metrik induziert sein kann).